



به نام خدا
هفتمین المپیاد هندسه ایران
سطح پیشرفته
۹ آبان ۱۳۹۹
زمان: ۲۷۰ دقیقه

مسائل این آزمون باید تا زمان انتشار آن‌ها در وبسایت رسمی المپیاد هندسه ایران محرمانه بمانند. آدرس وبسایت: igo-official.ir

مسئله ۱. فرض کنید M ، N و P به ترتیب اواسط اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC باشند. E و F دو نقطه روی پاره خط BC هستند به طوری که $\angle NEC = \frac{1}{4}\angle AMB$ و $\angle PFB = \frac{1}{4}\angle AMC$. ثابت کنید $AE = AF$.

مسئله ۲. مثلث حاده الزاویه ABC با مرکز دایره محاطی I مفروض است. فرض کنید N وسط کمان BAC از دایره محیطی مثلث ABC و P نقطه‌ای باشد که $ABPC$ متوازی الاضلاع است. قرینه A نسبت به N را Q و پای عمود وارد از A بر QI را R می‌نامیم. ثابت کنید خط AI بر دایره محیطی مثلث PQR مماس است.

مسئله ۳. سه دایره دو به دو متخارج را در نظر بگیرید با این خاصیت که هر خطی که دو تا از آن‌ها را جدا می‌کند از داخل دایره سوم می‌گذرد. ثابت کنید مجموع دوه‌دوی فاصله‌های مراکز دوایر حداکثر $2\sqrt{2}$ برابر مجموع شعاع‌های دوایر است. (یک خط دو دایره را جدا می‌کند، زمانی که دوایر با خط تقاطع نداشته باشند و در دو طرف متفاوت آن قرار داشته باشند).
نکته. برای اثبات کران c به جای $2\sqrt{2}$ نمره‌ای بسته به مقدار $c > 2\sqrt{2}$ می‌تواند تعلق بگیرد.

مسئله ۴. چهارضلعی محدب و محیطی $ABCD$ با مرکز دایره محاطی I داده شده است به طوری که دایره محاطی آن بر AD ، DC ، CB و BA به ترتیب در K ، L ، M و N مماس است. خطوط AD و BC در E و خطوط AB و CD در F تقاطع دارند. خط KM خطوط AB و CD را به ترتیب در X و Y قطع می‌کند. خط LN خطوط AD و BC را به ترتیب در Z و T قطع می‌کند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث XFY بر دایره به قطر EI مماس است اگر و تنها اگر دایره محیطی مثلث TEZ بر دایره به قطر FI مماس باشد.

مسئله ۵. مثلث حاده الزاویه ABC ($AC > AB$) با مرکز ارتفاعی H و دایره محیطی Γ را در نظر بگیرید. نقاط M و P به ترتیب اواسط پاره خط‌های BC و AH هستند. خط AM دایره Γ را برای بار دوم در X قطع می‌کند و نقطه N روی خط BC قرار دارد به طوری که NX بر Γ مماس است. نقاط J و K روی دایره به قطر MP قرار دارند به طوری که $\angle AJP = \angle HNM$ (B و J در یک طرف AH قرار دارند) و دایره ω_1 ، گذرنده از K ، H و J ، و دایره ω_2 ، گذرنده از K ، M و N ، مماس خارجی هستند. ثابت کنید مماس مشترک‌های خارجی ω_1 و ω_2 روی خط NH هم‌رسند.

بارم هر سؤال ۸ نمره است.
موفق باشید.